E.N.S.I. P

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 2 heures

PREMIÈRE PARTIE

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad X^2 (3Y - 4Y^7) \frac{dX}{dY} + 3X^3 (4Y^6 - 1) = 24\, Y^8$$

reliant les deux variables réelles X et Y, avec $| Y | \leqslant 1$.

1° Transformer (E) par le changement de variables $X^3 = x$, $Y^3 = u$. Intégrer l'équation différentielle (E') en x et u ainsi obtenue.

On pose $u = \cos \theta$, $\theta \in [0, \pi]$. Exprimer x en fonction de θ. Vérifier que l'une des solutions donne $x = 3 \cos \theta$.

2° A chacune des fonctions $\theta \longmapsto x(\theta)$ ainsi obtenues, on associe la fonction $\theta \longmapsto y(\theta)$ définie par :

$$y(\theta) = \int_0^{\theta} \operatorname{cotg} t \,.\, x'(t)\, dt \,.$$

Calculer $y(\theta)$.

3° Déterminer celle des fonctions x de θ qui prend la valeur numérique $x = -2$ pour $\theta = \pi$. Vérifier que la fonction y de θ correspondante est :

$$y(\theta) = 3 \sin \theta + \sin 3\theta.$$

Ce sont ces fonctions que l'on considérera dans la suite du problème.

DEUXIÈME PARTIE

On se place dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé, et on considère la courbe (C) décrite, lorsque θ varie de 0 à π, par le point M dont les coordonnées $x(\theta)$ et $y(\theta)$ sont les fonctions trouvées à la question I.3°.

1° Construire la courbe (C).

2° Calculer la longueur de (C).

3° Établir l'équation cartésienne de la tangente à (C) en un point M quelconque. Préciser les points où cette droite coupe le cercle centré à l'origine et de rayon 2. Vérifier le résultat pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi/4$.

TROISIÈME PARTIE

La variable θ est désormais une fonction deux fois dérivable du temps t. Le point M se déplace sur (C) de telle sorte que le support de son accélération passe constamment par l'origine. A l'instant $t = 0$, M est au point $(x = 2, y = 0)$ avec une vitesse de valeur 6 dirigée dans le sens des y croissants. On se contentera de prendre $\theta \in [0, \pi/4]$.

1° Établir une équation différentielle du premier ordre reliant θ et t. Intégrer cette équation.

2° A quel instant t le point M atteindra-t-il le premier point de rebroussement de (C)? Quelle sera sa vitesse à cet instant?

3° Déterminer et construire l'hodographe de ce mouvement (on conseille d'utiliser des coordonnées polaires).

E.N.S.I. P MATHEMATIQUES APPLIQUES 1977 ×97×

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail